1. ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG
2. Sắp xếp tô pô và BFS   
   Giải thích vì sao thuật toán sau không đảm bảo cho kết quả là một thứ tự tô pô: Chạy BFS, đánh dấu mỗi đỉnh theo khoảng cách tăng dần tới đỉnh nguồn của nó.

**Giải:**

Việc chạy BFS, đánh dấu đỉnh theo khoảng cách tăng dần tới đỉnh nguồn không đảm bảo cho kết quả là một thứ tự tô pô do có thể có nhiều đỉnh có cùng khoảng cách từ nguồn mà không có cách xác định thứ tự giữa chúng chỉ qua BFS.

1. Chu trình Euler có hướng   
   Viết một mô đun chương trình Euler nhận một đồ thị có hướng làm input và và tìm chu trình Euler trong đồ thị đó hoặc báo là không tồn tại.   
   Gợi ý: Hãy chứng minh rằng một đồ thị có hướng G có một chu trình Euler khi và chỉ khi G liên thông và mỗi đỉnh đều có bậc ra bằng bậc vào.

**Giải:**

- Chứng minh: Đồ thị có hướng G có một chu trình Euler khi và chỉ khi G liên thông và mỗi đỉnh đều có bậc ra bằng bậc vào.

- Chiều thuận: Với đồ thị có hướng có chu trình Euler, vì chu trình Euler đi qua tất cả các cạnh nên cũng đi qua tất cả các đỉnh có bậc lớn hơn 0. Do đó tất cả các đỉnh thuộc cùng thành phần liên thông. Trong chu trình số lần đi vào một đỉnh bằng số lần đi ra tại đỉnh đó nên bậc ra bằng bậc vào.

- Chiều nghịch: Với đồ thị liên thông và mỗi đỉnh đều có bậc ra bằng bậc vào (các đỉnh có bậc lớn hơn 0). Nếu đồ thị có 1 đỉnh thì nó luôn có chu trình Euler. Ta chọn một đỉnh bất kỳ (u) làm đỉnh xuất phát. Nếu tất cả các cạnh đã được thăm thì dừng lại, nếu chưa ta chọn một đỉnh kề với đỉnh hiện tại là v và thêm cạnh (u, v) vào chu trình Euler rồi loại bỏ cạnh (u, v) khỏi G. Gán u = v rồi trở lại bước chọn đỉnh xuất phát. Sau khi kết thúc thì đồ thị không còn cạnh nên đồ thị có một chu trình Euler.

- Sử dụng thuật toán Hierholzer, độ phức tạp là O(E) với E là số cạnh của đồ thị.

**11**.Đường đi Hamilton trong đồ thị có hướng phi chu trình  
Cho một đồ thị có hướng phi chu trình (DAG), thiết kế một thuật toán thời gian tuyến tính để xác định xem có tồn tại một đường đi có hướng đi qua mỗi đỉnh đúng một lần hay không.  
Gợi ý: Tính một sắp xếp tô pô và xem nếu có một cạnh nối giữa một cặp đỉnh liên tiếp trong thứ tự tô pô

**Giải:**

1. Đếm đồ thị có hướng.  
   Chứng minh rằng có tất cả 2^(2^V) đồ thị V đỉnh có hướng không chứa cạnh song song.  
   Gợi ý: Có bao nhiêu đồ thị có hướng chứa V đỉnh và E cạnh?

**Giải:**

Ta có một đồ thị có hướng với V đỉnh. Mỗi cặp đỉnh có thể có một cạnh hướng từ đỉnh này sang đỉnh kia hoặc hướng tới chính nó, hoặc không có cạnh nào cả. Tức là với mỗi cặp đỉnh, ta có 2 lựa chọn.

Vì có tổng là V^2 cặp đỉnh có thể có trong đồ thị (tính cả đỉnh nối với chính nó), và đồ thị có hướng thì mỗi cạnh có 2 chiều(từ A sang B và từ B sang A) nên số lượng đồ thị có hướng là 2^(V^2).

**15.** Sắp xếp tô pô dùng hàng đợi.  
Hãy cài thuật toán sắp xếp tô pô và sử dụng một mảng dùng chỉ số đỉnh để lưu giữ bậc vào (indegree) của mỗi đỉnh. Khởi tạo mảng và một hàng đợi chứa các đỉnh nguồn để duyệt một lần qua tất cả các cạnh. Sau đó thực hiện các bước sau cho đến khi hàng đợi rỗng:

- Lấy một đỉnh nguồn ra khỏi hàng đợi và đánh nhãn cho nó

- Với mỗi cạnh của đỉnh vừa được lấy ra, giảm phần tử mảng indegree ứng với

đỉnh đích của cạnh đó đi 1

- Nếu phần tử mảng nào bị giảm về 0 thì thêm đỉnh ứng với ô đó vào hàng đợi

**Giải:**

